INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 2025

2ª FASE

MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. O tempo total para resolução da prova é de **quatro horas**.
2. Não é permitido deixar o local de exame antes de decorridas **duas horas** do início da prova.
3. Você poderá usar **apenas** caneta esferográfica de corpo transparente com tinta preta, lápis ou lapiseira, borracha, régua transparente simples e compasso. **É proibido portar qualquer outro material escolar.**
4. Certifique-se de que você recebeu um **caderno de questões e um caderno de soluções.**
5. Não é permitido destacar qualquer das folhas que compõem os cadernos de questões ou de soluções.
6. O caderno de questões é composto por **10 questões dissertativas** (numeradas de 01 a 10).
7. A resolução das questões deve ser apresentada nos respectivos cadernos de soluções, **no local destinado a cada questão**.
8. Apenas as resoluções presentes nos espaços destinados para uma dada questão serão consideradas na correção dessa questão. Não será considerado para correção o conteúdo das páginas de rascunho.
9. Nas questões que envolvem cálculo matemático, as **expressões numéricas devem ser resolvidas até o final**. Em caso contrário, poderá haver **prejuízo de nota** atribuída à solução.
10. É obrigatória a **devolução dos cadernos de questões e de soluções**, sob pena de **desclassificação do candidato**.
11. No dia 04/12/2024, serão divulgadas as médias obtidas nas provas da segunda fase.
12. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar**.

MATEMÁTICA

Convenções: Considere o sistema de coordenadas cartesiano, a menos que haja indicação contrária. Os eixos horizontal e vertical são indicados respectivamente por O_x e O_y, e o centro do sistema, por O.

i	: denota a unidade imaginária, $i^2 = -1$.
$\overline{AB}$	: denota o segmento de reta de extremidades nos pontos A e B.
AB	: denota a reta que passa pelos pontos A e B.
$m(\overline{AB})$	: denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$.
$\max\{\mathrm{i}, \mathrm{j}\}$	: denota o maior dentre os valores i e j
$\det A$	: denota o determinante da matriz A.
A^T	: denota a transposta da matriz A.
A^{-1}	: denota a inversa da matriz A.
(a_{ij})	: representa uma matriz cuja entrada na linha i e coluna j é indexada por a_{ij}.

Questão 1. Encontre os valores reais a e b tais que o polinômio $p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1$, ao ser dividido por $x^2 - x + 1$, deixe resto $2x + 1$.

Questão 2. Seja E uma elipse com eixo focal no eixo O_x do sistema de coordenadas cartesiano. O centro de E é o ponto $(r, 0)$, com $r > 0$, sua excentricidade é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e seu semieixo maior mede $\sqrt{2}$. Considerando os pontos $(x, y) \in E$, determine o valor de r para que $\dfrac{y}{x}$ tenha valor máximo igual a 1 .

Questão 3. Sejam $\alpha, \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tais que

$$\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\alpha) - 2\text{sen}(\beta) + \cos(\beta) = \frac{3}{4}.$$

Calcule o valor de $\text{sen}(\alpha + \beta)$.

Questão 4. Seja ABC um triângulo de lados $m(\overline{AB}) = 6$, $m(\overline{AC}) = 10$ e $m(\overline{BC}) = 14$. Calcule o raio da circunferência externa ao triângulo ABC que tangencia simultaneamente o segmento $\overline{BC}$ e as retas suportes AB e AC.

Questão 5. Usando as aproximações $\log_{10} 2 = 0,3010$, $\log_{10} 3 = 0,4771$ e $\log_{10} 7 = 0,8450$, determine o primeiro algarismo (da esquerda para a direita) do resultado de 3^{100}.

Questão 6. Uma moeda não viciada é lançada n vezes. Encontre os valores de n que maximizam a probabilidade de sair cara pela quarta vez exatamente no enésimo lançamento.

Questão 7. Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + b$. Determine os valores reais a e b, sabendo que:

I. $p(x)$ tem uma raiz real dupla;
II. Os pontos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ e $(0, b)$ são vértices de um triângulo retângulo, em que x_1 e x_2 são raizes disitintas de $p(x)$.

Questão 8. Seja $A_k = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem k, em que $a_{ij} = \max\{i, j\}$ para todo i, j em $\{1, 2, \cdots, k\}$. Determine $\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k)$.

Questão 9. Determine a quantidade de matrizes 5×5 invertíveis e com entradas inteiras que satisfazem a propriedade $A^{-1} = A^T$.

Questão 10. Calcule a área da projeção ortogonal de um cubo de aresta 2 sobre um plano perpendicular a uma das diagonais do cubo.

RASCUNHO